



TITLE:

同変Nash予想について(微分解析と微分位相幾何)

AUTHOR(S):

枡田, 幹也

CITATION:

枡田, 幹也. 同変Nash予想について(微分解析と微分位相幾何). 数理解析研究所講究録 1990, 725: 90-96

ISSUE DATE:

1990-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101883>

RIGHT:

同変 Nash 予想について

阪市大理 科田幹也 (Mikiya Masuda)

§0. 序

変換群論, つまり群作用をもつ空間の研究, は今まで主に C^∞ までのカテゴリーでなされて来た。ここでは、有効な研究方法が開発され、豊富な情報が得られている。最近これらの情報、経験に基づき、トポロジーの観点から、代数的カテゴリーでの群作用、つまり代数的群作用を研究しようという試みがある。その一つの問題として「同変 Nash 予想」がある。これは、 C^∞ カテゴリーの変換群論と代数的カテゴリーの変換群論を結ぶ掛け橋である。本稿では、同変 Nash 予想の部分的解決を報告する。詳細は、[DM1] を参照して下さい。また、同変 Nash 予想に関する概説として [M] がある。本稿の結果は、K. H. Dovermann 氏との共同研究であることを付記しておく。

§1. 同変 Nash 予想。

以下、 G はコンパクト Lie 群とする。

定義 X が 非特異代数 G の様体とは、

$\Leftrightarrow \exists V$ 実 G 表現空間, $\exists p_i: V \rightarrow \mathbb{R} (1 \leq i \leq k)$ 多項式

st. $X = \{x \in V \mid p_1(x) = \dots = p_k(x) = 0\}$

G 不変かつ 非特異

注. $p = p_1^2 + \dots + p_k^2$ とおくと、 X は p の多項式 p の
零点集合と思える。

非特異代数 G の様体は、代数的構造を忘れると境界のない $\mathbb{C}^\infty G$ の様体である。特に、コンパクトならば、 $\mathbb{C}^\infty G$ の様体となる。次の予想はこの並を問う。

同変 Nash 予想. 任意の $\mathbb{C}^\infty G$ の様体は、代数的に実現される。つまり、ある非特異代数 G の様体と同変微分同相。

注 (1) 作用がない時、上の予想は 1952 年に Nash が予想したもので、1973 年 Tognoli にて、肯定的に解かれた。

(2) 上の予想で「 G 」と「 U 」に置きかえたものは正しくない。

次の部分的解決を得た。

定理 ([DM1]) 次のいずれかの場合、同変 Nash 予想は正しい。

- (1) G 作用が semi-free かつ non-free (つまり、固定点必ず持ち、固定点以外では、作用は自由)。
- (2) G が、奇位数可換群。

(1), (2) いずれも証明のアイデアは同じである。現在の所、自由な G 作用に対して、多くの場合予想が成立することかわかるが、一般には不明。それ故(1)で、non-free という条件がついてくる。また、(2)において可換性を仮定しているが、この仮定が取り除かれる可能性は十分にある。

さて、上の定理の応用を一つ述べよう。それが同変 Nash 予想を考える動機となった ([DM2], [DMP] 参照)。

応用 G を、巡回群でない Sylow 部分群を 3 つ以上持つ奇位数可換群とする (例、 $G = (\mathbb{Z}_3)^2 \times (\mathbb{Z}_5)^2 \times (\mathbb{Z}_7)^2$)。この時、非特異代数 G 加群体 X で、次をみたすものが存在する。

- (i) $X^G = \emptyset$ (X^G は固定点集合を表す)。
- (ii) X は \mathbb{R}^n と微分同相。

X が \mathbb{R}^n と非特異代数多様体として同型かどうかは不明。
 一般に、 \mathbb{R}^n と微分同相であるが同型でない非特異代数多様体は存在する (\mathbb{R}^n と同型でないことを見るには、例えば複素化が異なることを見る)。
 \mathbb{R}^n 上の G 表現は必ず原点を固定点に持つから、上の作用はかなりエキゾチックな作用と言える。
 G に、“巡回群でない Sylow 部分群を 3 つ以上持つ” という奇妙な仮定がついていては p^m 、 G が可換群の場合、(i) をみたすにはそれが必要条件である。

<応用の証明> Petrie により $C^\infty G$ 作用を持つ球面 Σ で、 $\Sigma^G = \{\text{一点}\}$ となるものが構成されて いる (ここで G の仮定が必要)。
 上の定理 (2) により、 Σ はある G 表現空間 V の中の非特異代数多様体と思え、 Σ^G もそう。 $p: V \rightarrow \mathbb{R}, q: V \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ Σ, Σ^G と零点集合に持つ多項式とする。

$$X = \{ (v, t) \in V \times \mathbb{R} \mid p(v) = 0, t(q(v) - 1) = 0 \}$$

 は非特異代数 G 多様体で

$$\begin{array}{ccc} \Sigma - \Sigma^G & \longrightarrow & X \\ \downarrow \psi & & \downarrow \iota \\ \Sigma & \longmapsto & (v, 1/q(v)) \end{array}$$

により、 $\Sigma - \Sigma^G$ と同変微分同相。 Σ は球面で Σ^G は一点だから、 $\Sigma - \Sigma^G$ は \mathbb{R}^n ($n = \dim \Sigma$) と微分同相。 よって、上の X が求まるもの。 \square

§2. G 同境

$G = \{1\}$ の時は、前に述べた様に Tognoli により予想は肯定的に解決されている。その証明は大きく分けて、次の2つのステップからなる。

補題1 非特異代数多様体と同境な C^{∞} 多様体は、代数的に実現される。

この補題により、(向きを考えない)同境界 \mathcal{N}_* の生成元を調べることに問題は帰着される(トポロジーの問題!)。一方 \mathcal{N}_* の環構造は決定されており、 $\mathbb{R}P^m$ や $\mathbb{R}P^s \times \mathbb{R}P^t$ のある超曲面で与えられることがわかっている。これらが代数的に実現されることをみるのは難しくない。つまり次を得る。

補題2 \mathcal{N}_* の生成元として、非特異代数多様体がとれる。

補題1, 2より、 $G = \{1\}$ の時、予想が正しいことが従う。補題1の証明は、技術的な困難はあるが、アイデアは明快である。

さて、 G が非自明の場合を考える際、まず、上の証明

が G 作用があってもどの程度成立するかと見るのが自然であろう。補題 1 の証明は、 G 作用がある場合にも少し修正すれば成立することチェックできる。

補題 1' ([DMP]) 非特異代数 G 多様体と G 同境な $C^\infty G$ 多様体は、代数的に実現される。

従って、(向きを考えない) G 同境環 \mathcal{H}_*^G の生成元を調べることに問題は帰着される。しかし、 G が非自明の時には、 \mathcal{H}_*^G の環構造は一般にわかっていない。だが、我々の目的のためには、 \mathcal{H}_*^G の環としての構造を知る必要はない、つまり、関係式等を知り、ちり知る必要はない。いくつかの非特異代数 G 多様体で生成されることを示せばよいのである。

定理の (1) または (2) の時には、 \mathcal{H}_*^G は G バクトル束の実射影束という形のものと自由な G 作用をもつものたちによって生成されることがわかり、それらが代数的に実現されることを示せば定理が従う。詳細は [DM1] を参照のこと。また、[M, §7] に $G = \mathbb{Z}_2$ の場合の証明が与えられている。

§3 結び

非特異代数多様体の構造は C^∞ 多様体の構造より、

“fine”である。丁度、 C^∞ 多様体の研究に、リーマン距離を(わざわざ)入れ、曲率を用いて、距離の取り方によらずに C^∞ 多様体としての不変量を導き出したように、 C^∞ 内多様体の研究に、代数多様体の構造を使うことができないだろうか。いくつかこの観点からの研究がある様であるが、もっと多くの研究がなされてもいいように思う。G作用がある場合も、 C^∞ カテゴリーでの変換群論のいくつかの結果を、代数的構造を用いて証明できないだろうか。例えば、「向きづけ可能な C^∞ 内多様体上の \mathbb{Z}_p (p : 奇素数)作用は、1点だけを固定点に持つことはない」という Conner-Floyd の定理があるが、代数的構造を用いた全く別証明があれば面白い。

参考文献

- [DM1] K.H. Dovermann and M. Mikiya, The equivariant Nash conjecture and strictly algebraic vector bundles (仮題), 準備中.
- [DM2] ———, Fixed point free low dimensional algebraic actions of A_5 on contractible varieties, Comment. Math. Helv. (to appear).
- [DMP] ——— and T. Petrie, Fixed point free algebraic actions on varieties diffeomorphic to \mathbb{R}^n , Progress in Math. 80 (1989), Birkhäuser, 49-80.
- [M] 折田 幹也, トポロジストから見た代数的群作用の一面, 数学 (近刊).